

K1.

Taulukossa on arvosanojen absoluuttinen jakauma.

Arvosana	<i>f</i>
L	1202
E	3799
M	4955
C	6906
B	5870
A	3342
I	1067

Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

- a) Suhteellinen jakauma sisältää havaintoarvojen suhteelliset frekvenssit eli niiden esiintymiskertojen suhteelliset osuudet prosentteina.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A arvosanat ja sarakkeeseen B frekvenssit.

Lasketaan soluun B9 frekvenssien summa.

Lasketaan soluun C2 arvosanan L suhteellinen frekvenssi, ja kopioidaan kaavaa sarakkeessa C alaspäin.

	A	B	C
1	Arvosana	<i>f</i>	<i>f</i> %
2	L	1202	=B2/\$B\$9*100
3	E	3799	
4	M	4955	
5	C	6906	
6	B	5870	
7	A	3342	
8	I	1067	
9	Yhteensä	=SUMMA(B2:B8)	

Ilmaistaan suhteelliset frekvenssit kahden desimaalin tarkkuudella.

Lasketaan lopuksi suhteellisten frekvenssien summa soluun C9.

	A	B	C
1	Arvosana	f	f%
2	L	1202	4,43
3	E	3799	14,00
4	M	4955	18,26
5	C	6906	25,44
6	B	5870	21,63
7	A	3342	12,31
8	I	1067	3,93
9	Yhteensä	27141	100

- b) Piirretään pylväskuvio **Ohjattu kaavion luonti** -toimintoa käyttäen seuraavan ohjeistuksen mukaisesti:
- Maalaa solut A1-C8.
 - Valitse **Lisää**-valikosta **Kaavio**.
 - Vaiheessa **1. Kaaviotyyppi** valitse kaaviotyyppiä **Pylväs**.
 - Vaiheessa **2. Tietoaalue** valitse **Arvosarjat sarakkeissa**, **Ensimmäinen rivi sisältää otsikoita ja Ensimmäinen sarake sisältää otsikoita**.
 - Vaiheessa **3. Arvosarja** poista arvosarja f.
 - Vaiheessa **4. Kaavioelementit** syötä otsikoksi ”Äidinkielen ja kirjallisuuden arvosanat”, X-akselin otsikoksi ”arvosana” ja Y-akselin otsikoksi ”suhteellinen frekvenssi (%)”. Poista valinta kohdasta **Näytä selite**.
 - Valitse **Valmis**.



K2.

Taulukossa on arvosanojen absoluuttinen jakauma.

Arvosana	Puoltoäänet	f
L	7	1202
E	6	3799
M	5	4955
C	4	6906
B	3	5870
A	2	3342
I	0	1067

Ratkaistaan tehtävä GeoGebran taulukkolaskennalla.

Taulukoidaan havaintoarvot.

	A	B	C
1	Arvosana	Puoltoäänet	f
2	L	7	1202
3	E	6	3799
4	M	5	4955
5	C	4	6906
6	B	3	5870
7	A	2	3342
8	I	0	1067

Määritetään tilastolliset tunnusluvut.

n	27141
Keskiarvo	3.9756
σ	1.5743
s	1.5743
Σx	107901
Σx^2	496231
Min	0
Q1	3
Mediaani	4
Q3	5
Max	7

Maalataan alue, jolla tutkittavat arvot sijaitsevat. Valitaan Yhden muuttujan analyysi -toiminto. Valitaan Näytä tilastot -toiminto.

- a) Puoltoäänten keskiarvo on 3,98.
- b) Puoltoäänten keskihajonta on 1,57.
- c) Puoltoäänten mediaani on 4.
- d) Puoltoäänen 4 frekvenssi on suurin. Siis puoltoäänten moodi on 4.

Vastaus

- a) 3,98
- b) 1,57
- c) 4
- d) 4

K3.

- a) Lyhin opiskelu-aika on 1,2 tuntia ja pisin 9,5 tuntia. Valitaan luokiksi esimerkiksi tasalevyiset luokat 1,0–2,9; 3,0–4,9; 5,0–6,9; 7,0–8,9 ja 9,0–10,9.

Lasketaan, kuinka monta havaintoa kussakin luokassa on.

Aika (h)	f
1,0–2,9	3
3,0–4,9	11
5,0–6,9	11
7,0–8,9	4
9,0–10,9	1

- b) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran taulukkolaskennalla.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A luokat ja sarakkeisiin B ja C luokkien todelliset rajat. Lasketaan sarakkeeseen D luokkakeskukset. Kirjoitetaan sarakkeeseen E luokkien frekvenssit.

	A	B	C	D	E
1	Aika (h)	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Luokkakeskus	f
2	1,0–2,9	0.95	2.95	1.95	3
3	3,0–4,9	2.95	4.95	3.95	11
4	5,0–6,9	4.95	6.95	5.95	11
5	7,0–8,9	6.95	8.95	7.95	4
6	9,0–10,9	8.95	10.95	9.95	1

Ajat on pyöristetty tunnin kymmenesosan tarkkuuteen. Tällöin esimerkiksi luokan 1,0–2,9 todellinen alaraja on 0,95 h ja todellinen yläraja 2,95 h. Luokkakeskus on luokan todellisten rajojen keskiarvo. Esimerkiksi luokan 1,0–2,9 luokkakeskus saadaan kaavalla $\text{”}=(B2+C2)/2\text{”}$. Kopioidaan kaavaa sarakkeessa D alaspäin.

Luokkien 3,0–4,9 ja 5,0–6,9 frekvenssit ovat suurimmat. Siis moodiluokka on 3,0–4,9 h ja 5,0–6,9 h.

Määritetään muut tilastolliset tunnusluvut sarakkeissa D ja E olevien luokkakeskusten ja frekvenssien perusteella.

n	30
Keskiarvo	5.2167
σ	1.8962
s	1.9286
Σx	156.5
Σx^2	924.275
Min	1.95
Q1	3.95
Mediaani	5.95
Q3	5.95
Max	9.95

Arvio opiskeluajan keskiarvolle on 5,2 h ja keskihajonnalle 1,9 h.

Vastaus

a)

Aika (h)	f
1,0–2,9	3
3,0–4,9	11
5,0–6,9	11
7,0–8,9	4
9,0–10,9	1

b) moodiluokka 3,0–4,9 h ja 5,0–6,9 h,
keskiarvo 5,2 h, keskihajonta 1,9 h

K4.

a) Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

Kirjoitetaan sarakkeiden otsikot ja jätetään otsikkorivin jälkeen yksi tyhjä rivi.

Kirjoitetaan sarakkeeseen A muuttujan luokat, sarakkeeseen B suhteelliset frekvenssit ja sarakkeisiin C ja D luokkien todelliset rajat.

Kirjoitetaan sarakkeeseen E riville 2 ensimmäisen luokan todellinen alaraja ja seuraavien solujen arvoiksi kunkin luokan todellinen yläraja.

Kirjoitetaan sarakkeeseen F riville 2 arvoksi 0 ja lasketaan seuraavien solujen arvoiksi suhteelliset summafrekvenssit.

	A	B	C	D	E	F
1	Aika (h)	f %	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Kuvaajassa käytettävä raja	sf%
2					0,5	0
3	1–2	6,7	0,5	2,5	2,5	=F2+B3
4	3–4	36,7	2,5	4,5	4,5	
5	5–6	40	4,5	6,5	6,5	
6	7–8	13,3	6,5	8,5	8,5	
7	9–10	3,3	8,5	10,5	10,5	

	A	B	C	D	E	F
1	Aika (h)	f %	Todellinen alaraja	Todellinen yläraja	Kuvaajassa käytettävä raja	sf%
2					0,5	0
3	1–2	6,7	0,5	2,5	2,5	6,7
4	3–4	36,7	2,5	4,5	4,5	43,4
5	5–6	40	4,5	6,5	6,5	83,4
6	7–8	13,3	6,5	8,5	8,5	96,7
7	9–10	3,3	8,5	10,5	10,5	100

Kertymäkuvaaja piirretään aloittaen ensimmäisen luokan alarajasta, jonka kohdalla suhteellisen summafrekvenssin arvo on 0. Tämän jälkeen käytetään luokkien ylärajoja, joiden kohdille merkitään suhteellisen summafrekvenssin arvo.

Piirretään kertymäkuvaaja **Ohjattu kaavion luonti** -toimintoa käyttäen.

- Maalaa solut E1–F7.

- Valitse **Lisää**-valikosta **Kaavio**
- Vaiheessa **1. Kaaviotyyppi** valitse kaaviotyypiksi **XY (hajonta)** ja **Pisteet ja viivat**.
- Vaiheessa **2. Tietoaalue** valitse **Arvosarjat sarakkeissa**, **Ensimmäinen rivi sisältää otsikoita** ja **Ensimmäinen sarake sisältää otsikoita**.
- Vaiheessa **3. Arvosarja** älä tee muutoksia.
- Vaiheessa **4. Kaavioelementit** syötä otsikoksi ”Opiskeluun käytetty aika viikossa”, X-akselin otsikoksi ”aika (h)” ja Y-akselin otsikoksi ”suhteellinen summataajuuksien (%)”. Poista ruksi kohdasta **Näytä selite**. Valitse **Näytä ruudukot** -kohdasta **X-akseli** ja **Y-akseli**.
- Valitse **Valmis**.

Ohjelma piirtää kertymäkuvaajan, mutta sitä täytyy vielä muokata. Mitä tiheämpi asteikko on, sitä tarkemmin arvoja voidaan lukea.

Kertymäkuvaajassa pystyakselin asteikon tulee olla välillä 0–100.

- Aktivoi piirtoalue kaksoisnapauttamalla tilastokuvioita.
- Napauta hiiren oikealla painikkeella muokattavaa akselia ja valitse **Muotoile akseli**. Vaihda Y-akselin asteikko välille 0–100. Voit tihentää X-akselin asteikkoa.



- b) Arvioidaan käytetyn ajan mediaani kertymäkuvaajasta. Kuvaaja ylittää 50 %:n rajan noin 5 tunnin kohdalla. Käytetyn ajan mediaani on 5 tuntia.

- c) Arvioidaan aika, jota vähemmän opiskeli 35 % opiskelijoista. Kuvaaja ylittää 35 %:n rajan noin 4 tunnin kohdalla. Vähiten opiskelevat 35 % käyttivät opiskeluun enintään 4 tuntia.

Vastaus

a)



b) 5 h

c) 4 h

K5.

Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

- a) Kirjoitetaan sarakkeeseen A arvosanat ja sarakkeeseen B frekvenssit. Lasketaan soluun C2 arvosanan L summafrekvenssi ja kopioidaan kaavaa sarakkeessa C alaspäin.

	A	B	C
1	Arvosana	f	sf
2	L	1202	=B2
3	E	3799	=C2+B3
4	M	4955	
5	C	6906	
6	B	5870	
7	A	3342	
8	I	1067	

Lasketaan soluun B9 frekvenssien summa. Lasketaan soluun D2 arvosanan L suhteellinen summafrekvenssi ja kopioidaan kaavaa sarakkeessa D alaspäin.

	A	B	C	D
1	Arvosana	f	sf	sf%
2	L	1202	1202	=C2/\$B\$9*100
3	E	3799	5001	
4	M	4955	9956	
5	C	6906	16862	
6	B	5870	22732	
7	A	3342	26074	
8	I	1067	27141	
9	Yhteensä	27141		

Ilmaistaan suhteelliset summafrekvenssit prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

	A	B	C	D
1	Arvosana	f	sf	sf%
2	L	1202	1202	4,4
3	E	3799	5001	18,4
4	M	4955	9956	36,7
5	C	6906	16862	62,1
6	B	5870	22732	83,8
7	A	3342	26074	96,1
8	I	1067	27141	100,0
9	Yhteensä	27141		

b) Suhteellinen summafrekvenssi ylittää 50 % arvosanan C kohdalla, joten mediaaniarvosana on C.

c) Vähintään arvosanan C sai 62,1 % kokelaista.

d) Vähintään arvosanan C sai 62,1 % kokelaista. Arvosanan L sai 4,4 % kokelaista.

Siispä vähintään arvosanan C, mutta enintään arvosanan E sai

$62,1 \% - 4,4 \% = 57,7 \%$ kokelaista.

Vastaus

a)

Arvosana	sf	sf%
L	1202	4,4
E	5001	18,4
M	9956	36,7
C	16 862	62,1
B	22 732	83,8
A	26 074	96,1
I	27 141	100,0

b) C

c) 62,1 %

d) 57,7 %

K6

Korttipakassa on 52 erilaista korttia.

- a) Korttipakassa on 13 pataa ja 13 ruutua. Koska kortti palautetaan aina noston jälkeen takaisin, lähtötilanne on molemmilla nostokerroilla sama. Siten nostot ovat toisistaan riippumattomia.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(1. pata \text{ ja } 2. ruutu) \\ &= P(\text{pata}) \cdot P(\text{ruutu}) \\ &= \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52} \\ &= 0,0625 \end{aligned}$$

- b) Pata ja ruutu voidaan saada kahdella tavalla. Tapahtumat "1. kortti on pata ja 2. kortti on ruutu" ja "1. kortti on ruutu ja 2. kortti on pata" ovat erillisiä.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{pata ja ruutu}) \\ &= P(1. pata \text{ ja } 2. ruutu \text{ TAI } 1. ruutu \text{ ja } 2. pata) \\ &= P(1. pata) \cdot P(2. ruutu) + P(1. ruutu) \cdot P(2. pata) \\ &= \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52} + \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52} \\ &= 0,125 \end{aligned}$$

Vastaus

- a) 0,062 b) 0,125

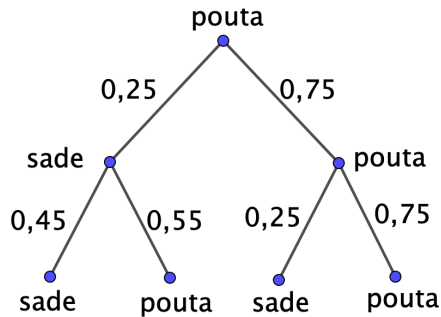
K7

Piirretään tilanteesta puukaavio, jossa luetellaan kaikki mahdolliset tapaukset. Merkitään vaihtoehtojen todennäköisyydet kaavioon.

tiistai

keskiviikko

torstai



Lasketaan todennäköisyys, että torstaina on pouta.

$P(\text{torstaina pouta, kun tiistaina oli pouta})$

$= P(sp \text{ tai } ps)$

$= P(sp) + P(ps)$

$= 0,25 \cdot 0,55 + 0,75 \cdot 0,75$

$= 0,7 = 70 \%$

Torstaina on pouta 70 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus

70 %

K8

Nopan heitto voidaan ajatella toistokokeeksi. Todennäköisyys, että nopanheitolla saadaan silmäluku 5 tai 6 on $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

- a) Lasketaan todennäköisyys, että seitsemällä nopanheitolla saadaan täsmälleen kerran silmäluku 5 tai 6.

$P(\text{täsmälleen kerran})$

$$= \binom{7}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$P = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

$$n = 7, r = 1, p = \frac{1}{3}$$

$$\approx 0,205$$

- b) Lasketaan todennäköisyys, että seitsemällä nopanheitolla saadaan täsmälleen kahdesti silmäluku 5 tai 6.

$P(\text{täsmälleen kahdesti})$

$$= \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$P = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

$$n = 7, r = 2, p = \frac{1}{3}$$

$$\approx 0,307$$

Vastaus

a) 0,205 b) 0,307

K9

Nopan heitto voidaan ajatella toistokokeeksi. Todennäköisyys, että kahdeksansivuisen nopan heitolla saadaan silmäluku 1, 2 tai 3 on

$$p = \frac{3}{8} = 0,375.$$

- a) Lasketaan todennäköisyys, että yhdeksällä nopanheitolla saadaan korkeintaan kaksi kertaa silmäluku 1, 2 tai 3.

$$\begin{aligned} &P(\text{korkeintaan kahdesti}) \\ &= P(0) + P(1) + P(2) \\ &= \binom{9}{0} \cdot 0,375^0 \cdot 0,625^9 + \binom{9}{1} \cdot 0,375^1 \cdot 0,625^8 + \binom{9}{2} \cdot 0,375^2 \cdot 0,625^7 \\ &\approx 0,282 \end{aligned}$$

- b) Tapahtuman "ainakin kolme kertaa" vastatapahtuma on "korkeintaan kaksi kertaa".

Lasketaan todennäköisyys, että yhdeksällä nopanheitolla saadaan ainakin kolme kertaa silmäluku 1, 2 tai 3.

$$\begin{aligned} &P(\text{ainakin 3 kertaa}) \\ &= 1 - P(\text{korkeintaan 2 kertaa}) \\ &\approx 1 - 0,282 \\ &\approx 0,718 \end{aligned}$$

Vastaus

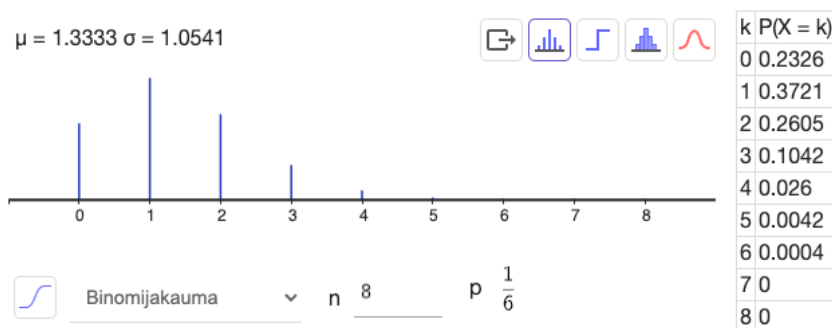
- a) 0,282 b) 0,718

K10

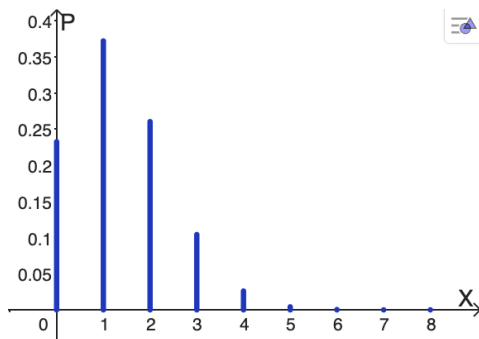
Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 8$. Yksittäisessä toistossa silmäluvun 6 todennäköisyys $p = \frac{1}{6}$.

a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebralla.

Määritetään todennäköisyyslaskurilla jakauma $\text{Bin}(8, \frac{1}{6})$ neljän desimaalin tarkkuudella.



b) Siirretään tilastokuvio piirtoalueelle. Nimetään vaaka-akseli kirjaimella X ja pystyakseli kirjaimella P .



c) Todennäköisin kuutosten lukumäärä on 1.

d) Lasketaan odotusarvo.

$$E(X) = np = 8 \cdot \frac{1}{6} \approx 1,3$$

Odotettavissa oleva kuutosten lukumäärän odotusarvo on 1,3.

Vastaus

c) 1

d) 1,3

K11

Satunnaismuuttuja X noudattaa jakaumaa $X \sim \text{Bin}(12; 0,65)$.

- a) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $X > 10$ eli että $X \geq 11$.

 Binomijakauma n 12 p 0.65



$P(11 \leq X \leq 12) = 0.0424$

$$P(X > 10) = P(11 \leq X \leq 12) \approx 0,042$$

- b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $6 \leq X \leq 9$.

 Binomijakauma n 12 p 0.65



$P(6 \leq X \leq 9) = 0.7641$

$$P(6 \leq X \leq 9) \approx 0,764$$

- c) Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo.

$$E(X) = np = 12 \cdot 0,65 = 7,8$$

Vastaus

- a) 0,042 b) 0,764 c) 7,8

K12

Martti tietää vastauksen 10 väitteeseen, mutta joutuu arvaamaan loput 15 vastausta. Todennäköisyys vastata oikein yksittäiseen kysymykseen on $\frac{1}{2} = 0,5$. Martin tulee saada vähintään 5 oikeaa arvausta läpäistääkseen testin.

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 15$ ja yksittäisessä toistossa onnistumisen todennäköisyys $p = 0,5$. Oikeiden vastausten lukumäärä X noudattaa jakaumaa $\text{Bin}(15; 0,5)$.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $X \geq 5$.

 Binomijakauma v n 15 p 0.5

P(5 ≤ X ≤ 15) = 0.9408

$$P(X \geq 5) = P(5 \leq X \leq 15) \approx 0,941$$

Martti läpäisee testin todennäköisyydellä 0,941.

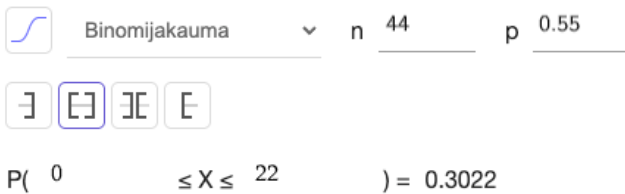
Vastaus
0,941

K13

Tapahtuma on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 44$. Yksittäisessä toistossa mustan kissan todennäköisyys $p = 0,55$.

Satunnaismuuttuja X : ”näyttelyyn saapuvien mustien kissojen lukumäärä” noudattaa jakaumaa $\text{Bin}(44; 0,55)$.

- a) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $X \leq 22$.

 The image shows the GeoGebra probability calculator interface. At the top, there is a dropdown menu set to 'Binomijakauma' (Binomial distribution). To its right, 'n' is set to 44 and 'p' is set to 0.55. Below these, there are four buttons: a left arrow, a double arrow (highlighted with a blue border), a right arrow, and a square button. At the bottom, the probability expression is shown as $P(0 \leq X \leq 22) = 0.3022$.

$$P(X \leq 22) = P(0 \leq X \leq 22) \approx 0,30$$

- b) Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo.

$$E(X) = np = 44 \cdot 0,55 = 24,2 \approx 24$$

Odotusarvo on 24 mustaa kissaa

Vastaus

a) 0,30

b) 24 mustaa kissaa

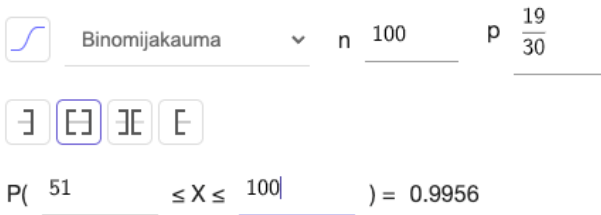
K14

- a) Näkkileipää putoaa 30 kerrasta voipuoli alaspäin 19 kertaa, joten todennäköisyys, että näkkileipä putoaa voipuoli alaspäin on

$$P = \frac{19}{30} \approx 0,633$$

- b) Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 100$. Yksittäisessä toistossa voipuoli alaspäin putoamisen todennäköisyys $p = \frac{19}{30}$.
Satunnaismuuttuja X : "voipuoli alaspäin pudonneiden lukumäärä" noudattaa jakaumaa $\text{Bin}(100, \frac{19}{30})$.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $X > 50$ eli että $X \geq 51$.



$$P(X > 50) = P(51 \leq X \leq 100) \approx 0,996$$

Vastaus

- a) 0,633
b) 0,996

K15

Tapahtuman voidaan ajatella olevan toistokoe, jossa on 10 toistoa.

Merkitään onnistumistodennäköisyyttä yksittäisessä toistossa kirjaimella p .

Olkoon satunnaismuuttuja

X : ”Viivin voittojen lukumäärä 10 kierroksella.”

Tällöin $X \sim \text{Bin}(10, p)$.

a) Todennäköisyys, että 10 toistosta 5 onnistuu on

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot p^5 \cdot (1 - p)^4 = 252p^5 \cdot (1 - p)^5$$

Tiedetään, että tämä todennäköisyys on 0,20. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan p .

$$252p^5 \cdot (1 - p)^5 = 0,20$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$p \approx 0,40 \quad \text{tai} \quad p \approx 0,60$$

Viivi voittaa yksittäisen kierroksen todennäköisyydellä 0,40 tai 0,60.

b) Jos $p \approx 0,40$, niin 30 kierroksella saatujen voittojen lukumäärän odotusarvo on $E(X) = np \approx 30 \cdot 0,40 = 12$.

Tällöin 15 voittoa on Petralle hyvä tulos.

Jos $p \approx 0,60$, niin 30 pelissä saatujen voittojen lukumäärän odotusarvo on $E(X) = np \approx 30 \cdot 0,60 = 18$.

Tällöin 15 voittoa on Petralle huono tulos.

Vastaus

a) 0,40 tai 0,60

- b)** Jos $p \approx 0,40$, niin $E(X) \approx 12$; ja tulos on hyvä.
Jos $p \approx 0,60$, niin $E(X) \approx 18$; ja tulos on huono.

K16

Määritetään satunnaismuuttujan X : ”kolikon ja nopan silmälukujen summa” jakauma. Käytetään apuna taulukkoa, johon summat on laskettu.

Kolikko	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5
		1	2	3	4
4-sivuinen noppa					

X	P
2	$\frac{1}{8}$
3	$\frac{1}{8}$
4	$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
5	$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
6	$\frac{1}{8}$
7	$\frac{1}{8}$

Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo.

$$E(X) = \frac{1}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{8} \cdot 6 + \frac{1}{8} \cdot 7 = \frac{9}{2} = 4,5$$

Vastaus

4,5

K17

Taulukoidaan silmälukujen summat.

1. noppa	6	7	8	9	10	11	12
	5	6	7	8	9	10	11
	4	5	6	7	8	9	10
	3	4	5	6	7	8	9
	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	5	6	7
		1	2	3	4	5	6
		2. noppa					

Jos silmälukujen summa on vähintään 8, Maisa maksaa Lasselle kolme euroa. Muissa tapauksissa Lasse maksaa Maisalle kaksi euroa.

Tapauksia on yhteensä 36, joissa 15:ssä summa on vähintään 8 ja 25:ssä summa on alle 8.

Olkoon satunnaismuuttuja X : ”Maisan yhdellä kierroksella saama voitto”.
Satunnaismuuttujan jakauma on:

X	P
-3	$\frac{15}{36}$
2	$\frac{25}{36}$

Lasketaan odotusarvo.

$$E(X) = \frac{15}{36} \cdot (-3) + \frac{21}{36} \cdot 2 = -\frac{1}{12}$$

Maisan voiton odotusarvo on $-\frac{1}{12} \text{ €} \approx -0,08 \text{ €}$.

Peli ei ole reilu, koska molempien pelaajien voiton odotusarvo ei ole nolla. Maisa häviää keskimäärin 0,08 € jokaisella kierroksella (ja Lasse voittaa keskimäärin saman verran).

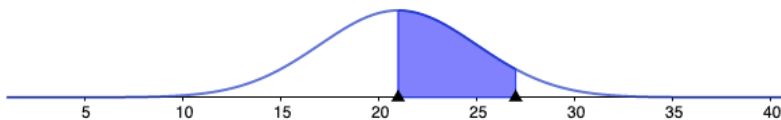
Vastaus

Peli ei ole reilu.

K18.

a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran todennäköisyysslaskurilla.

$\mu = 21$ $\sigma = 4$



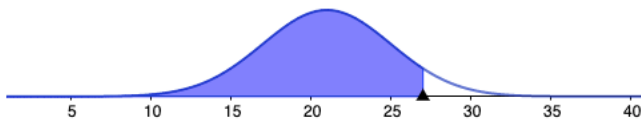
Normaalijakauma μ 21 σ 4

$P(21 \leq X \leq 27) = 0.43319$

$$P(21 \leq X \leq 27) \approx 0,43$$

b)

$\mu = 21$ $\sigma = 4$



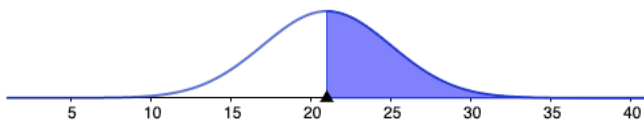
Normaalijakauma μ 21 σ 4

$P(X \leq 27) = 0.93319$

$$P(X \leq 27) \approx 0,93$$

c)

$$\mu = 21 \quad \sigma = 4$$



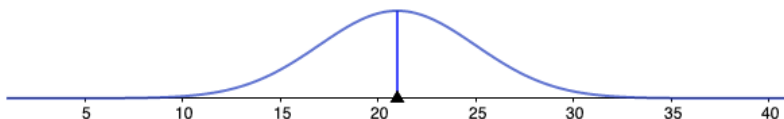
Normaalijakauma μ 21 σ 4

$P(21 \leq X) = 0.5$

$$P(X \geq 21) \approx 0,50$$

d)

$$\mu = 21 \quad \sigma = 4$$



Normaalijakauma μ 21 σ 4

$P(21 \leq X \leq 21) = 0$

$$P(X = 21) = 0$$

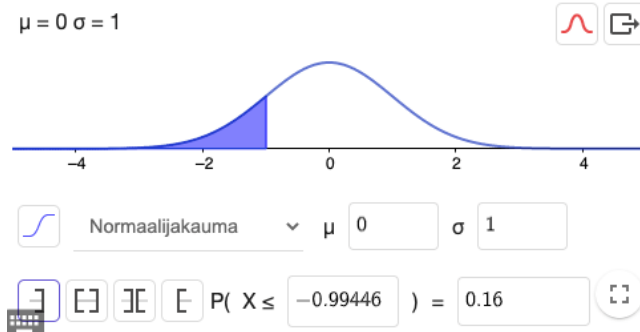
Vastaus

- a) 0,43
- b) 0,93
- c) 0,50
- d) 0,00

K19.

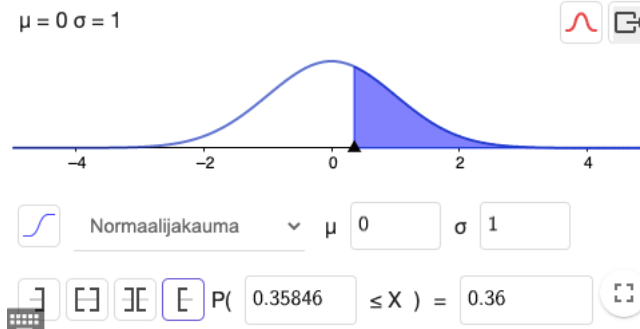
a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.

Satunnaismuuttuja Z noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 0 ja keskihajonta 1.



$$P(X \leq a) = 0,16, \text{ kun } a \approx -0,99$$

b)



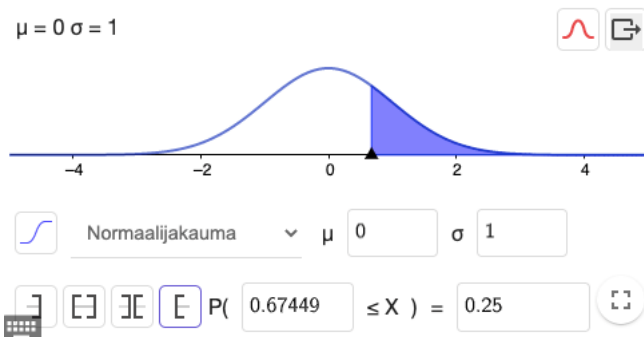
$$P(X \geq a) = 0,36, \text{ kun } a \approx 0,36$$

c) Määritettävän välin ala- ja ylärajan tulee sijaita symmetrisesti keskiarvon molemmiin puolin.

Välillä tulee olla 50 % jakaumasta, joten sekä välin alapuolella että yläpuolella on 25 % jakaumasta.

Määritetään välin yläraja a .

$$\mu = 0 \quad \sigma = 1$$



$$P(X > a) = 0,25, \text{ kun } a \approx 0,67$$

Vastaus

- a) -0,99
- b) 0,36
- c) 0,67

K20.

- a) Satunnaismuuttujan X odotusarvo on 12 ja keskihajonta 3.
Siis $\mu = 12$ ja $\sigma = 3$.

Lasketaan arvoa $x = 9$ vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{9 - 12}{3} = -1$$

Oikea vaihtoehto on 2.

- b) Lasketaan arvoa $x = 12$ vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{12 - 12}{3} = 0$$

Oikea vaihtoehto on 3.

- c) Lasketaan arvoa $x = 18$ vastaava normitettu arvo.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{18 - 12}{3} = 2$$

Oikea vaihtoehto on 5.

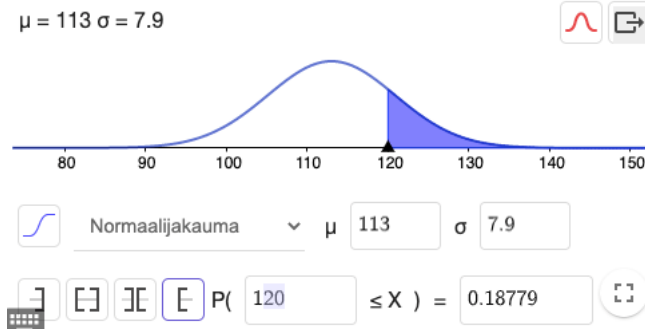
Vastaus

- a) 2
- b) 3
- c) 5

K21.

- a) Merkitään satunnaisesti valitun auton nopeutta kirjaimella X .
Nopeuksien keskiarvo on 113,0 km/h ja keskihajonta 7,9 km/h.
Siis $\mu = 113,0$ ja $\sigma = 7,9$.

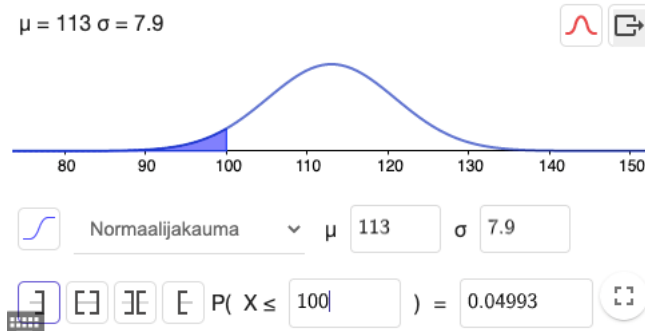
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun auton nopeus on yli 120 km/h.



Saadaan $P(X > 120) \approx 0,19$.

19 % autoilijoista ajoi yli 120 km/h.

- b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun auton nopeus on alle 100 km/h.



Saadaan $P(X < 100) \approx 0,05$.

5 % autoilijoista ajoi alle 100 km/h.

Vastaus

a) 19 %

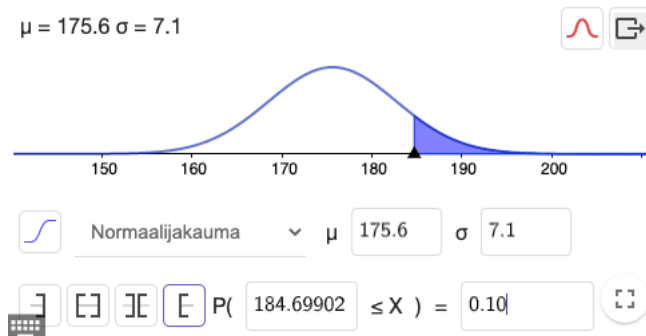
b) 5 %

K22.

- a) Merkitään satunnaisesti valitun 16-vuotiaan pojan pituutta senttimetreinä kirjaimella X .

Satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mu = 175,6$
ja keskihajonta $\sigma = 7,1$.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla sellainen pituus a ,
että $P(X > a) = 0,10$.



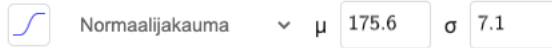
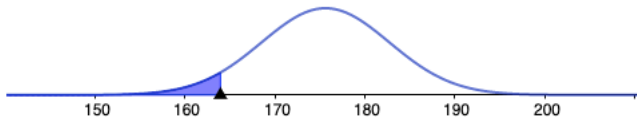
$P(X > a) = 0,10$, kun $a \approx 184,7$.

Pisimmät 10 % pojista ovat yli 184,7 cm pitkiä.

- b) Jos odotusarvon suhteen symmetrisellä välillä on 90 % pojista, niin sekä välin alapuolella että yläpuolella on 5 % pojista.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla pituusvälin alaraja a .

$$\mu = 175.6 \quad \sigma = 7.1$$



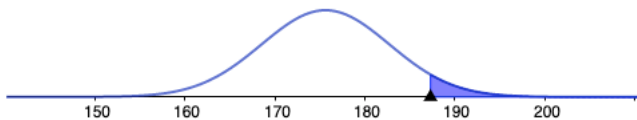
$$P(X \leq 163.92154) = 0.05$$

$$P(X < a) = 0,05, \text{ kun } a \approx 163,9.$$

Välin alaraja on 163,9 cm.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla pituusvälin yläraja b .

$$\mu = 175.6 \quad \sigma = 7.1$$



$$P(187.27846 \leq X) = 0.05$$

$$P(X > b) = 0,05, \text{ kun } b \approx 187,3.$$

Välin alaraja on 163,9 cm. Pituusväli on siis 163,9–187,3 cm.

Vastaus

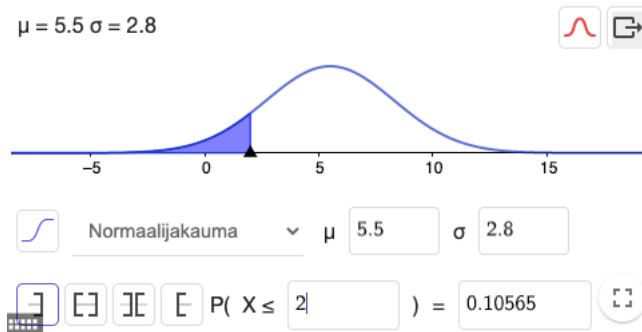
a) yli 184,7 cm

b) 163,9–187,3 cm.

K23.

- a) Televisiomallin kestoikä vuosina X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 5,5$ vuotta ja keskihajonta $\sigma = 2,8$ vuotta.

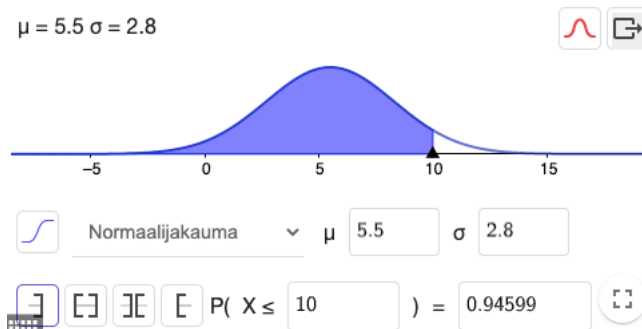
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla $P(X < 2)$.



Tämän mallinen televisio hajoaa alle kahdessa vuodessa todennäköisyydellä 0,11.

- b) Tapahtuman "ainakin yksi toimii 10 vuoden kuluttua" vastatapahtuman on "kaikki 12 televisiota hajoavat alle 10 vuodessa".

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla $P(X < 10)$.



Saadaan $P(X < 10) \approx 0,94599$.

Lasketaan tapahtuman "kaikki 12 televisiota hajoavat alle 10 vuodessa" todennäköisyys.

$$0,94599^{12} \approx 0,51362$$

Lasketaan tapahtuman "ainakin yksi toimii 10 vuoden kuluttua" todennäköisyys.

$$1 - 0,51362 \approx 0,49$$

Vastaus

a) 0,11

b) 0,49

K24.

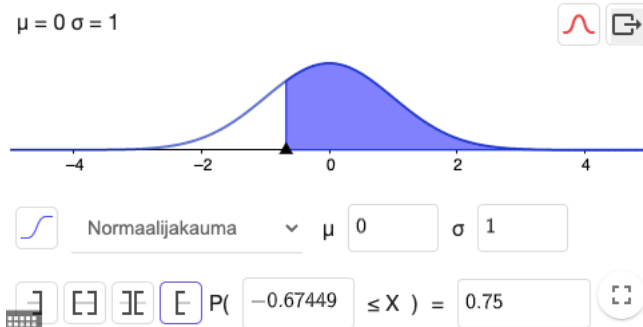
Tehtävänä on määrittää satunnaismuuttujan X keskihajonta σ , kun odotusarvo $\mu = 30$.

Olkoon arvoa $x = 35$ vastaava normitettu arvo z .

Tulee olla $P(X \geq 35) = P(Z \geq z) = 0,75$.

Satunnaismuuttuja $Z \sim N(0,1)$.

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että $P(Z \geq z) = 0,75$, kun $z \approx -0,67449$.



Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan σ .

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z \approx -0,67449, x = 35, \mu = 30$$

$$-0,67449 = \frac{30 - 35}{\sigma}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\sigma \approx 7,4$$

Vastaus

7,4

K25.

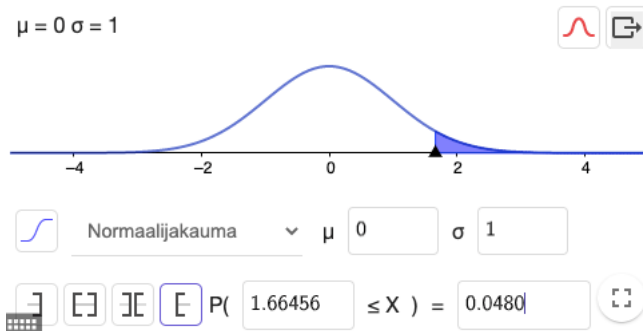
Tehtävänä on määrittää koripallopelaajan pituuden X odotusarvo μ , kun keskihajonta $\sigma = 4,80$ (cm).

Olkoon arvoa $x = 200$ (cm) vastaava normitettu arvo z .

Tulee olla $P(X > 200) = P(Z > z) = 0,0480$.

Satunnaismuuttuja $Z \sim N(0, 1)$.

GeoGebran todennäköisyyslaskurilla saadaan, että $P(Z > z) = 0,0480$, kun $z \approx 1,66456$.



Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan μ .

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z \approx 1,66456, x = 3200, \sigma = 4,80$$

$$1,66456 = \frac{200 - \mu}{4,80}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\mu \approx 192$$

Pelaajien keskipituus on 192 cm.

Vastaus
192 cm

K26.

- a) Oikein veikattujen ottelun tulosten lukumäärä X noudattaa binomijakaumaa $\text{Bin}(500, \frac{1}{3})$. Lasketaan jakauman odotusarvo ja keskihajonta.

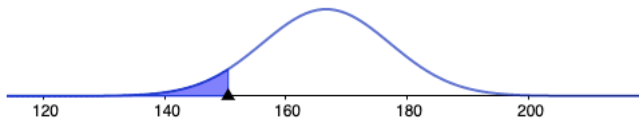
$$\mu = np = 500 \cdot \frac{1}{3} \approx 166,67$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{500 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 10,541$$

Arvioidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla. Satunnaismuuttuja X noudattaa likimain normaalijakaumaa $N(166,667; 10,541)$.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla $P(X < 150,5)$.

$$\mu = 166.67 \quad \sigma = 10.541$$



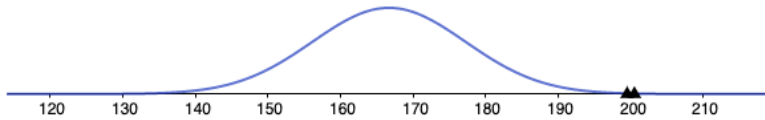
Normaalijakauma μ 166.67 σ 10.541

$P(X \leq 150.5) = 0.06251$

Veikkauksessa saadaan korkeintaan 150 ottelun tulos oikein todennäköisyydellä 0,063.

- b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla $P(199,5 \leq X < 200,5)$.

$$\mu = 166.67 \quad \sigma = 10.541$$



Normaalijakauma μ 166.67 σ 10.541

$P(199.5 \leq X \leq 200.5) = 0.00026$

Veikkauksessa saadaan tasan 200 ottelun tulos oikein todennäköisyydellä 0,00026.

Vastaus

a) 0,063

b) 0,00026

K27.

- a) Käytetään hyväksi jakauman symmetriaa odotusarvon 0 suhteen.

$$\begin{aligned}P(Z \leq -1,19) &= P(Z \geq 1,19) \\&= 1 - P(Z < 1,19) \\&= 1 - \Phi(1,19) \\&= 1 - 0,8830 \\&\approx 0,1170\end{aligned}$$

- d) Ratkaistaan tehtävä vastatapahtuman avulla.

Tehtävänä on määrittää sellainen normitettu arvo a , että $P(Z < a) = 1 - 0,27 = 0,73$.

Taulukon perusteella $a \approx 0,61$.

Vastaus

- a) 0,1170
b) $a \approx 0,61$

K28.

- a) Välipalapatukkapakkausten painojen keskiarvon luottamusväli 99 %:n luottamustasolla on [195,0 g, 207,0 g].

Otoskeskiarvo sijaitsee luottamusvälin keskipisteessä. Lasketaan välipalapatukkapakkauksen painon otoskeskiarvo.

$$\frac{195,0 \text{ g} + 207,0 \text{ g}}{2} = 201,0 \text{ g}$$

- b) Lasketaan keskiarvon virhemarginaali.

$$201,0 \text{ g} - 195,0 \text{ g} = 6,0 \text{ g}$$

Vastaus

- a) 201,0 g
b) 6,0 g

K29.

a) Voittajaehdokka saa äänistä vähintään

$$51,3 \% - 3,1 \% = 48,2 \%$$

ja enintään

$$51,3 \% + 3,1 \% = 54,4 \%$$

Luottamusväli on $[48,2 \%; 54,4 \%]$.

b) Voittajaehdokka saa äänistä vähintään

$$51,3 \% - 5,7 \% = 45,6 \%$$

ja enintään

$$51,3 \% + 5,7 \% = 57,0 \%$$

Luottamusväli on $[45,6 \%; 57,0 \%]$.

Vastaus

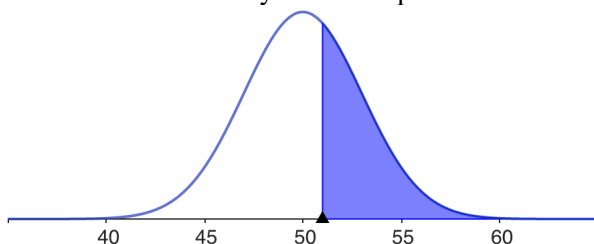
a) $[48,2 \%; 54,4 \%]$

b) $[45,6 \%; 57,0 \%]$

K30.

- a) Merkitään satunnaisesti valitun tyttövauvan pituutta senttimetreinä kirjaimella X . Pituuden odotusarvo on 50 cm ja keskihajonta 3 cm.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun tyttövauvan pituus on vähintään 51 cm.



Normaalijakauma μ 50 σ 3



$P(51 \leq X) = 0.3694$



$$P(X \geq 51) \approx 0,37$$

Satunnaisesti valitun tyttövauvan syntymäpituus on vähintään 51 cm todennäköisyydellä 0,39.

- b) Eräessä sairaalassa syntyneet 35 tyttövauvaa muodostavat otoksen. Vastaavien otosten otoskeskiarvot noudattavat normaalijakaumaa, jonka

odotusarvo $\mu = 50$ (cm) perusjoukon

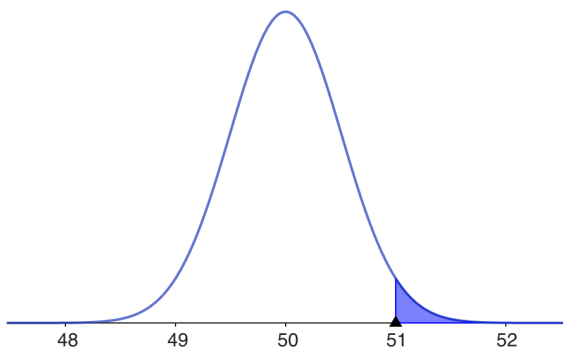
odotusarvo

keskihajonta $\sigma = \frac{3}{\sqrt{35}}$ (cm).

keskiarvon keskivirhe

Merkitään otoskeskiarvoa kirjaimella Y . Määritetään GeoGebran

todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että otoskeskiarvo on vähintään 51 cm.



Normaalijakauma μ 50 σ $\frac{3}{\sqrt{35}}$

$P(Y \geq 51) \approx 0,024$

$P(51 \leq X) = 0,0243$

$$P(Y \geq 51) \approx 0,024$$

Eräessä sairaalassa syntyneiden 35 tyttövauvan keskimääräinen syntymäpituus on vähintään 51 cm todennäköisyydellä 0,024.

Vastaus

a) 0,37

b) 0,024

K31.

- a) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla kaikkien kaakaopakkausten painojen keskiarvon luottamusväli 95 %:n luottamustasolla.

Keskiarvon Z-estimaatti ▼

Luottamustaso 0.95

Otos

Keskiarvo 795

σ 20

N 40 

Tulos

Keskiarvon Z-estimaatti

Keskiarvo	795
σ	20
S	3.1623
N	40
Alaraja	788.802
Yläraja	801.198
Väli	795 ± 6.198

Luottamusväli on [788,8 g; 801,2 g].

- b) Kaakaopakkauksen ilmoitettu paino 800 g on 95 %:n luottamustason luottamusvälin [788,8 g; 801,2 g] sisällä.

Pakkausautomaatti on säädetty oikein.

Vastaus

- a) [788,8 g; 801,2 g]

b) on säädetty oikein

K32.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla pelaamista harrastavien lukiolaisten prosenttiosuuksien luottamusväli eri luottamustasoilla.

Pelaamista harrastavien lukiolaisten prosenttiosuus otoksessa on $50\% = 0,50$, ja kysymykseen vastasi 6114 lukiolaista.

a) Määritetään luottamusväli 95 %:n luottamustasolla.

Suhteen Z-estimaatti 

Luottamustaso 0.95

Otos

Onnistumiset 3057 onnistumiset $0,50 \cdot 6114$

N 6114

Tulos

Suhteen Z-estimaatti

Onnistumiset	3057
N	6114
S	0.00639
Alaraja	0.48747
Yläaraja	0.51253
Väli	0.5 ± 0.01253

Luottamusväli 95 %:n luottamustasolla on [48,7 %; 51,3 %].

b) Määritetään luottamusväli 99 %:n luottamustasolla.

Suhteen Z-estimaatti ▼

Luottamustaso 0.99

Otos

Onnistumiset 3057

onnistumiset $0,50 \cdot 6114$

N 6114

[Tulos](#)

Suhteen Z-estimaatti

Onnistumiset	3057
N	6114
S	0.00639
Alaraja	0.48353
Yläraja	0.51647
Väli	0.5 ± 0.01647

Luottamusväli 99 %:n luottamustasolla on [48,4 %; 51,6 %].

c) Määritetään luottamusväli 99,9 %:n luottamustasolla.

Suhteen Z-estimaatti ▼

Luottamustaso 0.999

Otos

Onnistumiset 3057

onnistumiset $0,50 \cdot 6114$

N 6114

[Tulos](#)

Suhteen Z-estimaatti

Onnistumiset	3057
N	6114
S	0.00639
Alaraja	0.47896
Yläraja	0.52104
Väli	0.5 ± 0.02104

Luottamusväli 99,9 %:n luottamustasolla on [47,9 %; 51,2 %].

Vastaus

a) [48,7 %; 51,3 %]

b) [48,4 %; 51,6 %]

c) [47,9 %; 52,1 %]

K33.

Ratkaistaan tehtävä GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.

Suhteen Z-estimaatti	▼
Luottamustaso	0.95
Otos	
Onnistumiset	253.31
N	347
	onnistumiset $0,73 \cdot 347$
Tulos	
Suhteen Z-estimaatti	
Onnistumiset	253.31
N	347
S	0.02383
Alaraja	0.68329
Yläraja	0.77671
Väli	0.73 ± 0.04671
	luottamusvälin alaraja luottamusvälin yläraja virhemarginaali $0,04671 \approx 4,7 \%$

- a) Tutkimuksen virhemarginaali 95 %:n luottamustasolla oli 4,7 prosenttiyksikköä.
- b) Työilmapiirin vähintään hyväksi kokevien prosenttiosuuden luottamusväli 95 %:n luottamustasolla oli [68,3 %; 77,7 %].

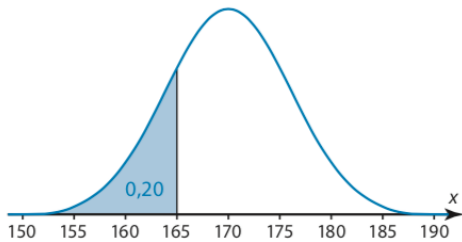
Luottamusvälin alaraja on alle 70 %. Ei voida päätellä 95 %:n varmuudella, että yli 70 % työntekijöistä kokee työilmapiirin vähintään hyväksi.

Vastaus

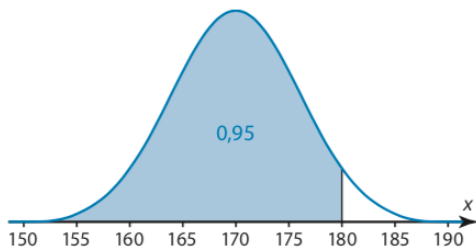
- a) 4,7 prosenttiyksikköä
- b) Ei, koska kyselyn luottamusvälin [68,3 %; 77,7 %] alaraja on alle 70 %.

A1

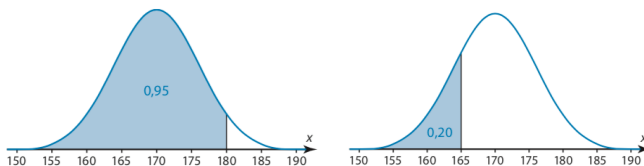
a) $P(X \leq 165) = 0,20$



b) $P(X \geq 180) = 1 - P(X < 180) = 1 - 0,95 = 0,05$



c) $P(165 \leq X \leq 180) = P(X \leq 180) - P(X \leq 165)$
 $= 0,95 - 0,20$
 $= 0,75$



Vastaus

a) 0,20 b) 0,05 c) 0,75

A2

Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

- a) Kirjoitetaan sarakkeeseen A muuttujan luokat ja sarakkeeseen B frekvenssit. Lasketaan frekvenssien summa soluun B7.

Lasketaan soluun C2 aikaluokan 0–2 suhteellinen frekvenssi, ja kopioidaan kaavaa sarakkeessa C alaspäin. Ilmaistaan suhteelliset frekvenssit prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

C2		$\sum$	=	=B2/\$B\$7*100
	A	B	C	
1	Aika (h)	f	f %	
2	0-2	10	12,8	
3	3-5	24	30,8	
4	6-8	16	20,5	
5	9-11	13	16,7	
6	12-14	15	19,2	
7	Yhteensä	78	100	

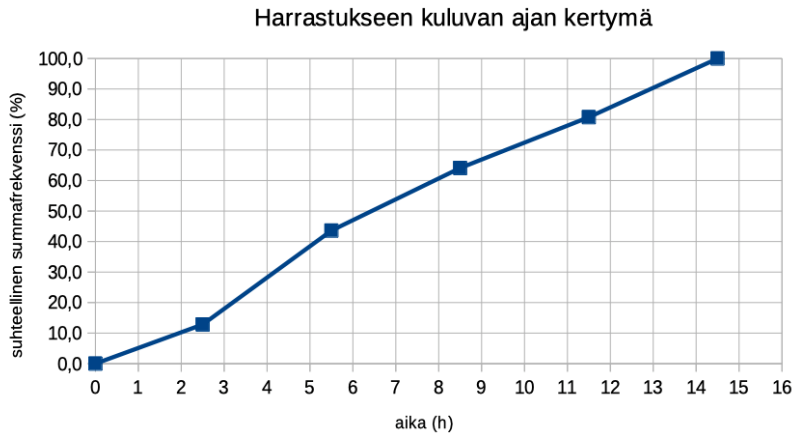
- b) Kirjoitetaan sarakkeisiin D ja E luokkien todelliset rajat.

Lisätään otsikkorivin alapuolelle tyhjä rivi. Kirjoitetaan sarakkeeseen F riville 2 ensimmäisen luokan alaraja ja seuraavien solujen arvoiksi kunkin luokan todellinen yläraja.

Kirjoitetaan sarakkeeseen G riville 2 arvoksi 0 ja lasketaan seuraavien solujen arvoiksi suhteelliset summafrekvenssit.

G3				=	=G2+C3		
	A	B	C	D	E	F	G
1	Aika (h)	f	f %	Alaraja	Yläraja	Kuvaajassa käytettävä raja	Sf %
2						0	0,0
3	0-2	10	12,8	0	2,5	2,5	12,8
4	3-5	24	30,8	2,5	5,5	5,5	43,6
5	6-8	16	20,5	5,5	8,5	8,5	64,1
6	9-11	13	16,7	8,5	11,5	11,5	80,8
7	12-14	15	19,2	11,5	14,5	14,5	100,0
8	Yhteensä	78	100				

Piirretään kertymäkuvaaja. Muokataan akseleja niin, että pystyakseli on välillä 0–100.



Kuvaajan piirtäminen on ohjeistettu luvun 2 esimerkissä 2.

- c) Arvioidaan käytetyn ajan mediaani kertymäkuvaajasta. Kuvaaja ylittää 50 %:n rajan noin 6,5 tunnin kohdalla. Harrastukseen käytetyn ajan mediaani on 6,5 tuntia.
- d) Arvioidaan aika, jota vähemmän aikaa käytti 30 % jäsenistä. Kuvaaja ylittää 30 %:n rajan noin 4 tunnin kohdalla. Vähiten aikaa käyttäneet 30 % käytti aikaa enintään 4,0 tuntia.
- e) Arvioidaan aika, jota enemmän aikaa käytti 30 % jäsenistä. Kuvaaja ylittää 70 %:n rajan noin 9,5 tunnin kohdalla. Eniten aikaa käyttäneet 30 % käytti aikaa vähintään 9,5 tuntia.

Vastaus

- c) 6,5 h d) 4,0 h e) 9,5 h

A3

Autoilija saa työpäivän aikana pysäköintivirhemaksun todennäköisyydellä $9,3 \% = 0,093$.

Autoilija ei saa työpäivän aikana pysäköintivirhemaksun todennäköisyydellä $1 - 0,093 = 0,907$.

Kyseessä on toistokoe, jossa $n = 5$ ja $p = 0,093$.

a) Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{autoilija saa täsmälleen 2 pysäköintivirhemaksua}) \\ &= \binom{5}{2} \cdot 0,093^2 \cdot 0,907^3 \\ &\approx 0,065 = 6,5 \% \end{aligned}$$

b) Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{autoilija saa korkeintaan 2 pysäköintivirhemaksua}) \\ &= P(\text{saa 0 tai 1 tai 2 pysäköintivirhemaksua}) \\ &= \binom{5}{0} \cdot 0,093^0 \cdot 0,907^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,093^1 \cdot 0,907^4 + \binom{5}{2} \cdot 0,093^2 \cdot 0,907^3 \\ &= 0,993 = 99,3 \% \end{aligned}$$

c) Tapahtuman ”saa ainakin kolme pysäköintivirhemaksua” vastatapahtuma on ”saa korkeintaan kaksi pysäköintivirhemaksua”.

$$\begin{aligned} &P(\text{autoilija saa ainakin kolme pysäköintivirhemaksua}) \\ &= 1 - P(\text{autoilija saa korkeintaan kaksi pysäköintivirhemaksua}) \\ &= 1 - 0,993 \\ &= 0,007 = 0,7 \% \end{aligned}$$

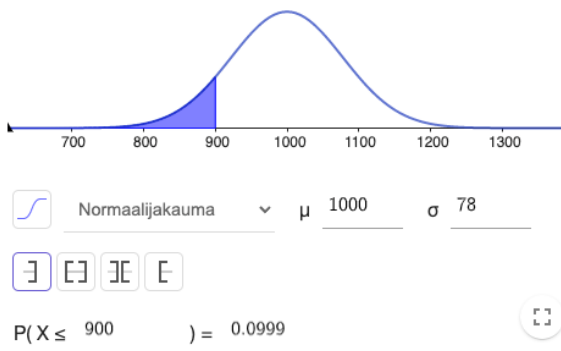
Vastaus

- a)** 6,5 %
- b)** 99,3 %
- c)** 0,7 %

A4

Merkitään satunnaisesti valitun jauhopussin painoa kirjaimella X . Jauhopussien painon odotusarvo $\mu = 1000$ (g) ja keskihajonta $\sigma = 78,0$ (g).

- a) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun jauhopussin paino on alle 900 g.

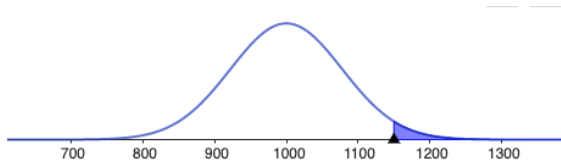


$$P(X < 900) \approx 0,0999$$

Jauhopussi painaa alle 900 g todennäköisyydellä 0,0999.

- b) On määritettävä raja, jonka yläpuolella on 2,70 % jauhopusseista, eli sellainen paino a , että $P(X > a) = 0,027$.

Määritetään raja GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



Normaalijakauma



μ 1000

σ 78



$P(\underline{1150.2933} \leq X) = \underline{0.027}$



$P(X > a) = 0,027$, kun $a \approx 1150$

Hylkäämisraja on 1150 g.

Vastaus

a) 0,0999

b) 1150 g

A5

a) Väite on tosi.

$$\text{Otoskeskiarvo on } \frac{246,0 + 253,0}{2} = 249,5 \text{ (g)} .$$

b) Väite on epätosi.

Keksipakkausten massojen keskiarvo on 95 %:n varmuudella välillä 246,0–253,0 g.

c) Väite on tosi.

Keksipakkausten massojen keskiarvo on 95 %:n varmuudella välillä 246,0–253 g mutta se voi olla myös välin ulkopuolella.

d) Väite on epätosi.

Virhemarginaali on puolet luottamusvälin pituudesta eli

$$\frac{253,0 - 246,0}{2} = 3,5 \text{ (g)} .$$

e) Väite on epätosi.

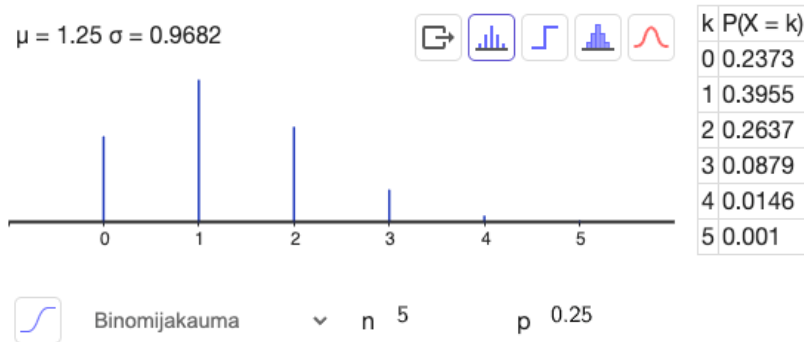
Kun luottamustason varmuus nousee 95 %:sta 99 %:iin, luottamusvälin pituus kasvaa.

A6

Tapahtuma voidaan ajatella toistokokeena, jossa toistojen lukumäärä $n = 5$. Silmäluvun 1 todennäköisyys yksittäisessä heitossa on $p = \frac{1}{4} = 0,25$.

Silmälukujen 1 lukumäärä X noudattaa jakaumaa $\text{Bin}(20; 0,25)$.

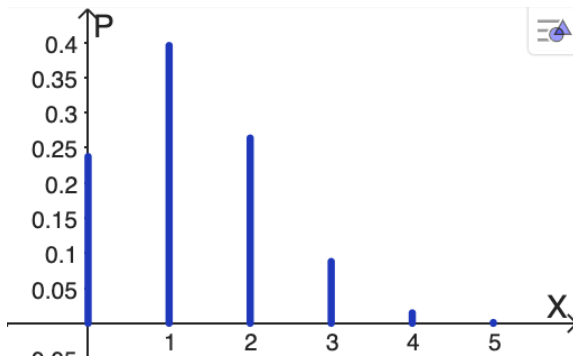
- a) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla satunnaismuuttujan jakauma.



Jakauma on siis:

k	$P(X = k)$
0	0,2373
1	0,3955
2	0,2637
3	0,0879
4	0,0146
5	0,0010

- b) Siirretään tilastokuvio piirtoalueelle. Nimetään vaaka-akseli kirjaimella X ja pystyakseli kirjaimella P .



c) Todennäköisin ykkösten lukumäärä on 1.

d) Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo.

$$E(X) = np = 5 \cdot 0,25 \approx 1,25$$

Ykkösten lukumäärän keskiarvo on 1,25.

Vastaus

c) 1

d) 1,25

A7

Puoluekantansa ilmoitti 1884 henkilöä.

- a) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla kokoomuksen ja sosiaalidemokraattien kannatusprosenttien luottamusväli 95 %:n luottamustasolla.

Kokoomuksen kannatusprosentti otoksessa on $24,2 \% = 0,242$.

Jakauma	Tilastot	×
Suhteen Z-estimaatti		
Luottamustaso 0.95		
Otos		
Onnistumiset 455.928		
N 1884		
Tulos		
Suhteen Z-estimaatti		
Onnistumiset 455.928		
N 1884		
S 0.0099		
Alaraja 0.2227		
Yläaraja 0.2613		
Väli 0.242 ± 0.0193		

Luottamusväli on [22,3 %; 26,1 %]. Kokoomuksen kannatus on 95 %:n varmuudella välillä 22,3 %–26,1 %.

Sosiaalidemokraattien kannatusprosentti otoksessa on $19,3 \% = 0,193$.

Jakauma	Tilastot	X
---------	----------	---

Suhteen Z-estimaatti ▼

Luottamustaso 0.95

Otos

Onnistumiset 363.612

N 1884

[Tulos](#)

Suhteen Z-estimaatti

Onnistumiset	363.612
N	1884
S	0.0091
Alaraja	0.1752
Yläraja	0.2108
Väli	0.193 ± 0.0178

Luottamusväli on [17,5 %; 21,1 %]. Sosiaalidemokraattien kannatus on 95 %:n varmuudella välillä 17,5 %–21,1 %.

Luottamusvälit eivät ole lainkaan päällekkäin, joten voidaan päätellä 95 %:n varmuudella, että kokoomuksen kannatus oli kaikkien äänioikeutettujen keskuudessa suurempaa kuin sosiaalidemokraattien.

- b)** Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla perussuomalaisten kannatusprosentin luottamusväli 95 %:n luottamustasolla.

Perussuomalaisten kannatusprosentti otoksessa on $17,1\% = 0,171$.

Jakauma	Tilastot	X
---------	----------	---

Suhteen Z-estimaatti



Luottamustaso 0.95

Otos

Onnistumiset 322.164

N 1884

Tulos

Suhteen Z-estimaatti

Onnistumiset	322.164
N	1884
S	0.0087
Alaraja	0.154
Yläaraja	0.188
Väli	0.171 ± 0.017

Luottamusväli on [15,4 %; 18,8 %]. Perussuomalaisten kannatus on 95 %:n varmuudella välillä 15,4 %–18,8 %.

a-kohdan perusteella sosiaalidemokraattien kannatus on 95 %:n varmuudella välillä 17,5 %–21,1 %.

Luottamusvälit ovat osittain päällekkäiset, joten ei voida päätellä 95 %:n varmuudella, että sosiaalidemokraattien kannatus oli kaikkien äänioikeutettujen keskuudessa suurempaa kuin perussuomalaisten.

Vastaus

- a) voidaan
- b) ei voida

A8

Määritetään ensin otoksen työmatkojen ajan keskiarvo ja keskihajonta.

	A	B	C	D
1	Aika (m...			
2	47	keskiarvo	59.76	
3	52	keskihajonta	6.18	
4	55			
5	53			
6	54			

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla kaikkien työmatkojen aikojen keskiarvon luottamusväli 95 %:n luottamustasolla.

Jakauma	Tilastot	X
---------	----------	---

Keskiarvon Z-estimaatti ▼

Luottamustaso 0.95

Otos

Keskiarvo 59.76

σ 6.18

N 45

[Tulos](#)

Keskiarvon Z-estimaatti

Keskiarvo	59.76
σ	6.18
S	0.9213
N	45
Alaraja	57.9544
Yläraja	61.5656
Väli	59.76 ± 1.8056

Luottamusväli on [58,0 min; 61,6 min]. Kaikkien työmatkojen keskiarvo on siis 95 %:n varmuudella välillä 58,0–61,6 min, joten ei voida sanoa 95 %:n varmuudella, että keskiarvo olisi muuttunut edellisen vuoden keskiarvosta 61 minuuttia.

Vastaus
ei voida

A9

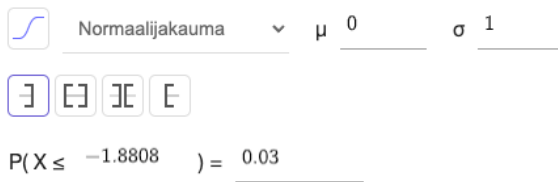
Tehtävänä on määrittää sokeripaketin massan X odotusarvo μ , kun keskihajonta $\sigma = 25$ (g). Verrataan satunnaismuuttujan X jakaumaa normitettuun normaalijakaumaan.

Olkoon arvoa $X = 1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$ vastaava normitettu arvo z .

Tulee olla $P(X \leq 1000) = P(Z \leq z) = 0,03$.

Satunnaismuuttuja $Z \sim N(0, 1)$.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla arvo z .



Normaalijakauma μ 0 σ 1

$P(X \leq -1.8808) = 0.03$

$P(Z \leq z) = 0,03$, kun $z \approx -1,8808$

Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan μ .

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z \approx -1,8808, x = 1000, \sigma = 25$$

$$-1,8808 = \frac{1000 - \mu}{25}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\mu \approx 1047 \text{ (g)}$$

Odotusarvoksi pitäisi säätää 1047 g.

Vastaus

1047 g

A10

Otoskoko $n = 100$. Otoksen keskiarvo on 12,5 tuntia ja keskihajonta 1,3 tuntia.

a) Tapa 1.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla käyttöajan luottamusväli 99 %:n luottamustasolla.

Jakauma	Tilastot	
Keskiarvon Z-estimaatti ▼		
Luottamustaso	0.99	
Otos		
Keskiarvo	12.5	
σ	1.3	
N	100 	

Tulos

Keskiarvon Z-estimaatti

Keskiarvo	12.5
σ	1.3
S	0.13
N	100
Alaraja	12.1651
Yläraja	12.8349
Väli	12.5 ± 0.3349

Luottamusväli on [12,2 h; 12,8 h].

Tapa 2.

99 %:n luottamustasolla kriittinen arvo on 2,58.

Lasketaan virhemarginaali.

$$2,58 \cdot \frac{1,3}{\sqrt{100}} = 0,3354$$

$$\text{kriittinen arvo} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Kaikkien akkujen käyttöaikojen keskiarvo on 99 %:n varmuudella vähintään

$$12,5 \text{ h} - 0,3354 \text{ h} = 12,1646 \text{ h} \approx 12,2 \text{ h}$$

ja enintään

$$12,5 \text{ h} + 0,3354 \text{ h} = 12,8354 \text{ h} \approx 12,8 \text{ h}.$$

Luottamusväli on [12,2 h; 12,8 h].

b) Luottamusvälin pituus on 0,5 h, kun virhemarginaali on

$$\frac{0,5 \text{ h}}{2} = 0,25 \text{ h}.$$

99 %:n luottamustasolla kriittinen arvo on 2,58.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan otoskoko n .

$$0,25 = 2,58 \cdot \frac{1,3}{\sqrt{n}}$$

$$\text{virhemarginaali} = \text{kriittinen arvo} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

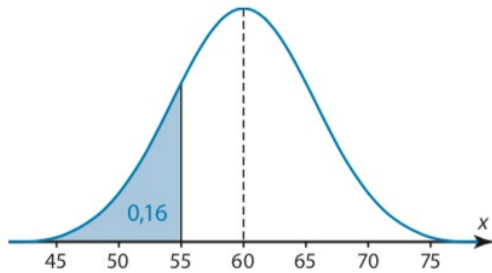
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n \approx 180$$

Vastaus

a) [12,2 h; 12,8 h] **b)** 180 akkua

B1



a) $P(X \leq a) = 0,5$, kun $a = 60$

b) $P(X \geq a) = 0,84$, kun $P(x < a) = 0,16$

$P(x < a) = 0,16$, kun $a = 55$

c) $P(X \geq a) = 0,16$

Etsitään siis kohtaa, jonka oikealla puolella oleva pinta-ala on 0,16.

Koska kohdan 55 vasemmalla puolella oleva pinta-ala on 0,16 ja kohta 55 on viisi yksikköä odotusarvon alapuolella, niin kohdan $60 + 5 = 65$ oikealle puolella oleva pinta-ala on 0,16.

Siis $P(X \geq a) = 0,16$, kun $a = 65$.

Vastaus

a) $a = 60$ b) $a = 55$ c) $a = 65$

B2

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 6$. Yksittäisessä toistossa virheellisen kupin todennäköisyys $p = 0,02$.

a) Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{täsmälleen 2 virheellistä}) \\ &= \binom{6}{2} \cdot 0,02^2 \cdot 0,98^4 \\ &\approx 0,0055 \end{aligned}$$

b) Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{täsmälleen 0 virheellistä}) \\ &= \binom{6}{0} \cdot 0,02^0 \cdot 0,98^6 \\ &\approx 0,89 \end{aligned}$$

c) Tapahtuman ”ainakin yksi virheellinen” vastatapahtuma on ”ei yhtään virheellistä”. Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{ainakin yksi virheellinen}) \\ &= 1 - P(\text{ei yhtään virheellistä}) \\ &= 1 - 0,89 \\ &= 0,11 \end{aligned}$$

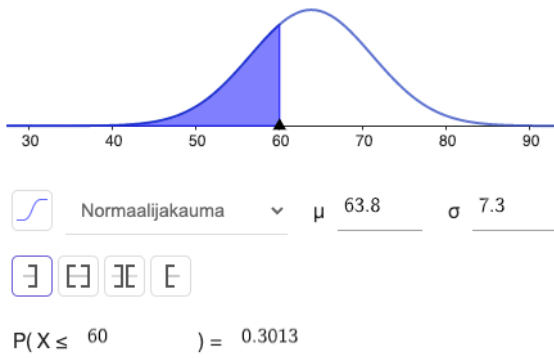
Vastaus

a) 0,0055 b) 0,89 c) 0,11

B3

Merkitään satunnaisesti valitun auton nopeutta kirjaimella X . Autojen nopeuksien odotusarvo $\mu = 63,8$ (km/h) ja keskihajonta $\sigma = 7,3$ (km/h).

- a) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun autoilijan nopeus on alle 60 km/h.

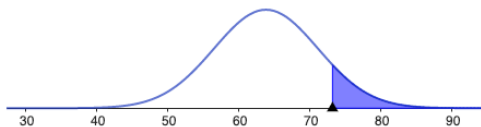


$$P(X \leq 60) \approx 0,3013$$

30 % autoilijoista noudatti nopeusrajoitusta.

- b) On määritettävä raja, jonka yläpuolella on 10 % autoilijoista, eli sellainen nopeus a , että $P(X > a) = 0,10$.

Määritetään raja GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



Normaalijakauma μ 63.8 σ 7.3

$P(X > a) = 0.10$

$P(73.1553 \leq X) = 0.10$

$P(X > a) = 0.10$, kun $a \approx 73$

Nopeimmat 10 % autoilijoista ajoi vähintään nopeudella 73 km/h.

Vastaus

a) 30 %

b) vähintään 73 km/h

B4

Rahaa heitetään viisi kertaa. Jotta kruuna voisi sattua toisen kerran viimeisessä heitossa, neljän ensimmäisen heiton joukossa on oltava 1 kruuna ja 3 klaavaa sekä viimeisen heiton on oltava kruuna.

Lasketaan ensin, millä todennäköisyydellä neljässä heitossa saadaan täsmälleen yksi kruuna. Kyseessä on toistokoe, jossa $n = 4$ ja $p = 0,5$.

$P(\text{täsmälleen 1 kruuna neljässä heitossa})$

$$\begin{aligned} &= \binom{4}{1} \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^3 \\ &= 0,25 \end{aligned}$$

Lasketaan seuraavaksi, millä todennäköisyydellä saadaan neljässä ekassa heitossa 1 kruuna ja viidennessä heitossa kruuna.

$$\begin{aligned} &P(4 \text{ heitossa 1 kruuna JA viidennellä kruuna}) \\ &= P(4 \text{ heitossa 1 kruuna}) \cdot P(\text{viidennellä kruuna}) \\ &= 0,25 \cdot 0,5 = 0,125 \end{aligned}$$

Vastaus

0,125

B5

- a) 95 %:n luottamustason kriittinen arvo on 1,96. Lasketaan prosenttiosuuden virhemarginaali 95 %:n luottamustasolla.

$$1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,50 \cdot (1 - 0,50)}{5677}} \quad \text{kriittinen arvo} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$
$$= 0,013 = 1,3 \%$$

Kannattajien prosenttiosuus on 95 %:n varmuudella vähintään

$$50 \% - 1,3 \% = 48,7 \%$$

ja enintään

$$50 \% + 1,3 \% = 51,3 \%$$

Kannattajien prosenttiosuuden luottamusväli 95 %:n luottamustasolla on [48,7 %; 51,3 %].

- b) Kysymykseen vastasi 5677 lukiolaista.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla prosenttiosuuden luottamusväli 95 %:n luottamustasolla.

Suhteen Z-estimaatti



Luottamustaso 0.95

Otos

Onnistumiset 2838.5

N 5677

Tulos

Suhteen Z-estimaatti

Onnistumiset 2838.5

N 5677

S 0.0066

Alaraja 0.487

Yläraja 0.513

Väli 0.5 ± 0.013

Kannattajien prosenttiosuuden luottamusväli 95 %:n luottamustasolla on [48,7 %; 51,3 %].

- c) Työssä työn mielekkyyden kokee tärkeimmäksi 95 %:n varmuudella 48,7 %–51,3 % lukiolaisista.

Vastaus

a) [48,7 %; 51,3 %]

b) [48,7 %; 51,3 %]

B6

- a) Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 20$. Yksittäisessä toistossa onnistumisen todennäköisyys on p .

Toistokokeen odotusarvo on $E(X) = np = 20p$.

Tiedetään, että odotusarvo on 6,4. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan p .

$$\begin{aligned} 20p &= 6,4 & | :20 \\ p &= 0,32 \end{aligned}$$

- b) Jukan saamien kymppien lukumäärä X noudattaa binomijakaumaa $\text{Bin}(20; 0,32)$.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että $5 \leq X \leq 10$.

Binomijakauma n 20 p 0.32

$P(5 \leq X \leq 10) = 0.7894$

$$P(5 \leq X \leq 10) \approx 0,79$$

Jukka heittää vähintään 5 mutta enintään 10 kymppiä todennäköisyydellä 0,79.

Vastaus

- a) $p = 0,32$
b) 0,79

B7

Merkitään satunnaisesti valitun 18-vuotiaan tytön pituutta senttimetreinä kirjaimella X . Pituuden keskiarvo on 165 cm ja keskihajonta 6 cm. Siis $\mu = 165$ ja $\sigma = 6$.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun tytön pituus on korkeintaan 175 cm.

 Normaalijakauma μ 165 σ 6

$P(X \leq 175) = 0.9522$

Umpimähkään valittu 18-vuotias tyttö on korkeintaan 175 cm pitkä todennäköisyydellä 0,952.

Lasketaan todennäköisyys, että kaikki kolme tyttöä ovat alle 175 cm pitkiä.

$$\begin{aligned} &P(\text{kaikki kolme alle 175 cm}) \\ &= P(X < 175) \cdot P(X < 175) \cdot P(X < 175) \\ &= 0,9522 \cdot 0,9522 \cdot 0,9522 \\ &= 0,9522^3 \approx 0,863 \end{aligned}$$

Kolmen tytön ryhmässä kaikki ovat alle 175 cm pitkiä todennäköisyydellä 0,863.

Tapahtuman "ainakin yksi on yli 175 cm" vastatapahtuma on "kaikki ovat korkeintaan 175 cm". Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$P(\text{ainakin yksi yli } 175 \text{ cm})$

$= 1 - P(\text{kaikki alle } 175 \text{ cm}) \quad P(\text{kaikki alle } 175 \text{ cm}) \approx 0,863$

$= 1 - 0,863$

$= 0,137$

Kolmen tytön ryhmässä ainakin yksi on yli 175 cm pitkä todennäköisyydellä 0,137.

Vastaus

korkeintaan 175 cm pitkä: 0,952;

kaikki alle 175 cm pitkiä: 0,863;

ainakin yksi yli 175 cm pitkä: 0,137

B8

- a) Otoksen koko on 40 pakkausta. Näiden keskiarvo on 695 ml ja keskihajonta 22 ml.

Tapa 1.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla suihkusaippuan määrän luottamusväli 95 %:n luottamustasolla.

Jakauma	Tilastot
Keskiarvon Z-estimaatti ▼	
Luottamustaso	0.95
Otos	
Keskiarvo	695
σ	22
N	40

Tulos

Keskiarvon Z-estimaatti

Keskiarvo	695
σ	22
S	3.4785
N	40
Alaraja	688.1823
Yläraja	701.8177
Väli	695 $\pm$ 6.8177

Luottamusväli on [688 ml; 702 ml].

Tapa 2.

95 %:n luottamustasolla kriittinen arvo on 1,96.

Lasketaan virhemarginaali.

$$1,96 \cdot \frac{22}{\sqrt{40}} = 6,8 \text{ (ml)}$$

$$\text{kriittinen arvo} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Kaikkien pakkausten suihkusaippuan määrän keskiarvo on 95 %:n varmuudella vähintään

$$695 \text{ ml} - 6,8 \text{ ml} = 688,2 \text{ ml} \approx 688 \text{ ml}$$

ja enintään

$$695 \text{ ml} + 6,8 \text{ ml} = 701,8 \text{ ml} \approx 702 \text{ ml}$$

Luottamusväli on [688 ml; 702 ml].

- b)** Koska tavoitemäärä 700 ml on luottamusvälin [688 ml; 702 ml] sisällä, annosteluautomaatti on säädetty oikein.

Vastaus

- a)** [688 ml; 702 ml]
b) on säädetty oikein

B9

- a) Olkoon satunnaismuuttuja X : "satunnaisesti valitun ihmisen älykkyyssosamäärä". Satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mu = 100$ ja keskihajonta $\sigma = 15$.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun vieraan älykkyyssosamäärä on vähintään 105.

 Normaalijakauma μ 100 σ 15

P(105 $\leq X$) = 0.3694

Satunnaisesti valitun vieraan älykkyyssosamäärä on vähintään 105 todennäköisyydellä 0,37.

- b) Juhliin osallistuvat 45 vierasta muodostavat otoksen.

Lasketaan älykkyyssosamäärän keskiarvon keskivirhe.

$$s_{\bar{x}} = \frac{15}{\sqrt{45}} \approx 2,24$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Vastaavien otosten älykkyyssosamäärien otoskeskiarvot noudattavat normaalijakaumaa, jonka

odotusarvo $\mu = 100$ ja
keskihajonta $\sigma = 2,23$.

perusjoukon odotusarvo
keskiarvon keskivirhe

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että otoskeskiarvo on vähintään 105.



Normaalijakauma

 μ 100 σ 2.23

$$P(105 \leq X) = 0.01248$$

Juhliin osallistuneiden älykkyyssosamäärien keskiarvo on vähintään 105 todennäköisyydellä 0,013.

Vastaus

a) 0,37

b) 0,013

B10

1. Ratkaistaan tehtävä LibreOfficen Calc-ohjelmalla.

Lasketaan jokaisen heittokerran silmälukujen summat.

Määritetään sen jälkeen kysytyt tunnusluvut.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Heitto	Noppa 1	Noppa 2	Noppa 3	Noppa 4	Noppa 5	Summa				
2	1	3	6	4	3	5	21	=SUMMA(B2:F2)	Minimi	10	=MIN(G2:G101)
3	2	4	1	3	1	1	10		Maksimi	26	=MAKS(G2:G101)
4	3	4	3	6	4	1	18		Mediaani	17	=MAKS(G2:G101)
5	4	6	5	6	5	4	26		Keskiarvo	17,1	=KESKIARVO(G2:G101)
6	5	6	3	1	5	5	20		Keskihajonta	3,6	=KESKIAJONTA(G2:G101)
7	6	2	1	4	6	2	15				
8	7	3	3	4	1	3	14				

minimi: 10

maksimi: 26

mediaani: 17

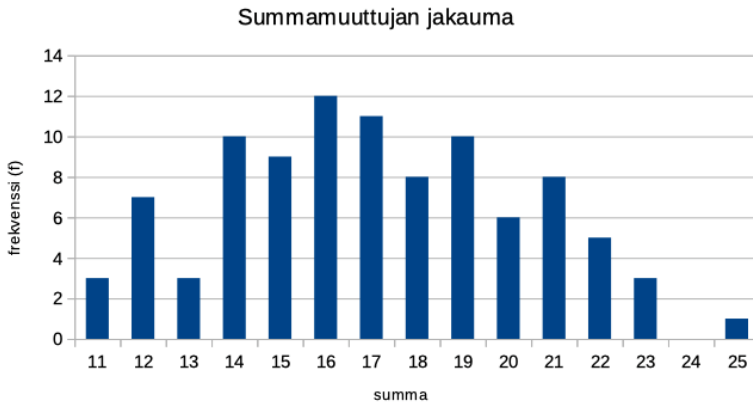
keskiarvo: 17,1

keskihajonta: 3,6

2. Laaditaan frekvenssitaulukko. Kirjoitetaan sarakkeeseen L summamuuttujan mahdolliset arvot 10, 11, 12, ..., 26. Lasketaan sarakkeeseen M kunkin arvon frekvenssi.

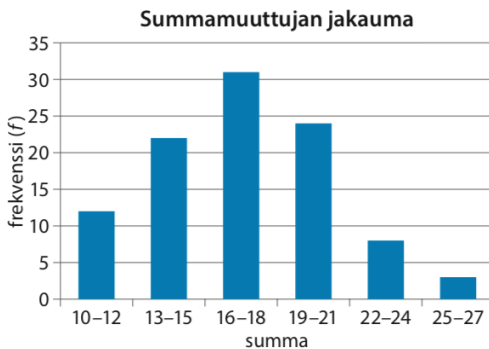
	L	M	N	O
1	Summa	f		
2	11	3	=LASKE.JOS(\$G\$2:\$G\$101;L2)	
3	12	7		
4	13	3		
5	14	10		
6	15	9		
7	16	12		
8	17	11		
9	18	8		
10	19	10		
11	20	6		
12	21	8		
13	22	5		
14	23	3		
15	24	0		
16	25	1		

Valitaan solut L1:M16 ja piirretään pylväskaavio.



HUOMAA:

Voit myös luokitella aineiston ensin tasalevyisiin luokkiin ja piirtää sen jälkeen pylväskuvion.



3. Kuvaajan perusteella luvut painottuvat keskelle ja ääripäissä on vähemmän lukuja. Siten jakauma muistuttaa enemmän normaalijakaumaa kuin tasaista jakaumaa.